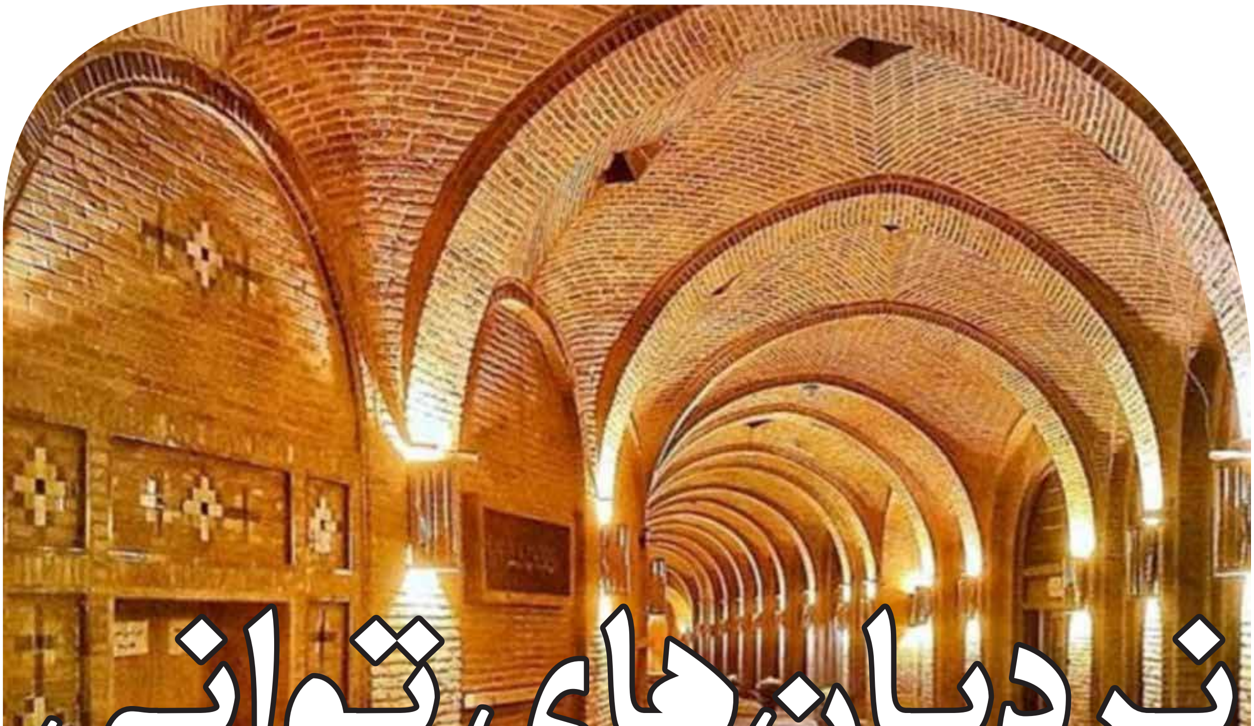
عباس قلعه‌پوراقدم



نردبان‌های توانی

چکیده

در این مقاله، برخی نردبان‌های توانی متشکل از عددهای یکسان را در دو جهت پایین (طبق قرارداد موجود در ریاضی) و بالا محاسبه و بر این اساس، معادلاتی موسوم به «معادلات چندتوانی» را تعریف و بررسی می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: توان، نردبان‌های توانی، چندتوانی با عددهای یکسان، محاسبه‌های جهت پایین و جهت بالا، معادلات چندتوانی

۱. مقدمه:

طبق قراردادی که در ریاضی داریم، مقدار یک نردبان توانی نظیر $۳^{۲^{۴}}$، با شروع محاسبه‌ها از بالا و ادامهٔ کار به سمت پایین به دست می‌آید. در این نردبان توانی، بالاترین جفت برابر ۱۶ می‌شود $(۱۶=۲^{۴})$ و سپس: $۳^{۱۶} = ۴۳'۰۴۶'۷۲۱$ به‌طور خلاصه:

$$۳^{۲^{۴}} = ۳^{(۲^{۴})} = ۳^{۱۶} = ۴۳'۰۴۶'۷۲۱$$

حال اجازه دهید این نردبان توانی را برخلاف قرارداد، در جهت متضاد، یعنی از پایین به بالا محاسبه کنیم. آیا فکر می‌کنید نتایج دو محاسبه یکسان خواهند بود؟ پاسخ منفی است، توجه کنید:

$$۳^{۲^{۴}} = (۳^{۲})^{۴} = ۹^{۴} = ۶'۵۶۱$$

همان‌گونه که می‌بینید، اختلاف نتایج به دست آمده بسیار بالاست. در ادامه پس از چند تعریف، با ارائهٔ چند مثال، تفاوت میان محاسبه‌ها را در دو جهت متضاد بیشتر بررسی خواهیم کرد.

۲. تعریف‌ها:

۲-۱. چندتوانی با عددهای یکسان

عبارت‌هایی به فرم کلی:

$$x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$$

نظیر:

$$۹^{۹} \qquad ۲^{۲^{۲^{۲}}} \qquad ۳^{۳^{۳^{۳}}}$$

را که x می‌تواند گویا، گنگ یا ... باشد، نردبان‌های توانی یا چندتوانی‌های با عددهای یکسان می‌نامند. طول یک چندتوانی برابر تعداد xهای به‌کار رفته در آن تعریف می‌شود. یک چندتوانی به طول ۲ به فرم کلی x^{x} را «دوتوانی» نیز می‌نامند.

۲-۲. محاسبات جهت پایین و جهت بالا

طبق قراردادی که در ریاضی داریم، مقدار یک نردبان توانی با محاسبه‌های از بالا به پایین به دست می‌آید، ولی چون قصد داریم محاسبه‌ها را در جهت متضاد و تفاوت نتایج به دست آمده را بررسی کنیم، دو تعریف و دو نمادگذاری زیر را ارائه می‌کنیم:

محاسبهٔ مقدار چندتوانی به فرم کلی $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$ براساس قرارداد، یعنی از بالا به پایین، محاسبهٔ جهت پایین می‌نامیم که به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\swarrow x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$$

محاسبهٔ مقدار چندتوانی از پایین به بالا را محاسبهٔ جهت بالا می‌نامیم که به‌صورت زیر نموده می‌شود:

$$x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\nearrow$$

۳. چند مثال برای بررسی تفاوت محاسبه‌های جهت پایین و بالا:

۱-۳. طبق قرارداد (محاسبهٔ جهت پایین)، مقدار نردبان توانی 3^{3^3} با شروع محاسبه‌ها از بالا و ادامه به سمت پایین به دست می‌آید. بالاترین جفت برابر ۲۷ می‌شود ($3^3=27$)، و سپس داریم: $3^{27}=7'625'597'484'987$. به‌طور خلاصه و نمادین داریم:

$$\swarrow 3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7'625'597'484'987$$

حال به محاسبهٔ جهت بالا می‌پردازیم:

$$3^{3^3}\nearrow = (3^3)^3 = 3^{27} = 19'683$$

همان‌گونه که می‌بینید، اختلاف بالایی در نتایج دو نوع محاسبه مشهود است.

۲-۳. نردبان توانی

$$2^{2^{2^2}}$$

را در دو جهت پایین و بالا محاسبه می‌کنیم:

$$\swarrow 2^{2^{2^2}} = 2^{(\swarrow 2^{2^2})} = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{(2^4)} = 2^{16} = 65'536$$

$$(2^2=4,\ 2^4=16,\ 2^{16}=65'536)$$

$$2^{2^{2^2}}\nearrow = (2^{2^2}\nearrow)^2 = ((2^2)^2)^2 = ((4)^2)^2 = 16^2 = 256$$

$$(2^2=4,\ 4^2=16,\ 16^2=256)$$

شاید متوجه شده باشید که در این دو مثال و مثال مطرح شده در بخش مقدمه، محاسبهٔ جهت پایین عدد بسیار بزرگ‌تری را نسبت به محاسبهٔ جهت بالا به دست می‌دهد.

۳-۳. اجازه دهید نردبان مثال (۳-۲) را به اندازهٔ یک واحد بلندتر کنیم!

$$2^{2^{2^{2^2}}}$$

$$\swarrow 2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{(\swarrow 2^{2^{2^2}})} = 2^{(\swarrow 2^{(2^{2^2})})} = 2^{(2^{(2^{(2^2)})})} = 2^{(2^{(2^4)})}$$

$$= 2^{(2^{16})} = 2^{65'536} = ?$$

$$(2^2=4,\ 2^4=16,\ 2^{16}=65'536,\ 2^{65'536}=?)$$

فکر می‌کنید مقدار عدد $2^{65'536}$ چقدر بزرگ باشد؟ چاپ رایانه‌ای تهیه شده از این عدد نشان می‌دهد که عدد $2^{65'536}$ به‌صورت ۲۰۰۳۵۰۰۰ شروع می‌شود و دارای ۱۹'۷۲۹ رقم است. حال به محاسبهٔ جهت بالا می‌پردازیم:

$$2^{2^{2^{2^2}}}\nearrow = (2^{2^{2^2}}\nearrow)^2 = ((2^{2^2}\nearrow)^2)^2 = \left[((2^2)^2)^2\right]^2 = \left[((4)^2)^2\right]^2$$

$$= (16^2)^2 = 256^2 = 65'536$$

همان‌گونه که می‌بینید، در این مثال نیز محاسبهٔ طبق قرارداد، عدد بسیار بزرگ‌تری را نسبت به محاسبهٔ جهت بالا نتیجه داد.

۴-۳. این بار یک نردبان توانی کوتاه به طول ۳ را محاسبه می‌کنیم:

$$9^{9^9}$$

$$\swarrow 9^{9^9} = 9^{(9^9)} = 9^{387'420'489} = ?$$

این عدد بیش از ۳۶۰ میلیون رقم دارد!

$$9^{9^9}\nearrow = (9^9)^9 = (387'420'489)^9 = ?$$

این عدد تنها ۷۷ رقم دارد.

۴. معادلات چندتوانی:

به جز دوتوانی‌ها (X^X) که به وضوح محاسبهٔ جهت پایین و بالا برای آن‌ها نتیجهٔ یکسانی دارد و برخی موارد استثنا که به یکی از آن‌ها در ادامه اشاره خواهد شد، در چندتوانی‌های مرتبهٔ بالاتر از ۲، محاسبه‌ها در دو جهت نتایج متفاوتی دارند.

۴-۱. یکی از موارد استثنا، سه‌توانی ۲ است که در هر دو جهت به مقدار واحدی ختم می‌شود:

$$۲^{۲^۲} = ۲^{(۲^۲)} = ۲^۴ = ۱۶ \ , \ ۲^{۲^۲} = (۲^۲)^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$

۴-۲. طرح یک پرسش، تشکیل و حل معادلات چندتوانی

تفاوت در نتایج محاسبات جهت بالا و پایین به طرح این پرسش منجر می‌شود: به ازای چه مقادیری از x، دو نردبان توانی با عددهای یکسان، با طول‌های متفاوت یا برابر، و جهت‌های متضاد می‌توانند مقدار یکسانی داشته باشند؟ برای مثال، به ازای چه مقداری از x، یک سه‌توانی جهت بالای x با یک سه توانی جهت پایین x برابر می‌شود؟ برای پاسخ به پرسش اخیر، معادله‌ای به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$x^{x^x} = x^{x^x}$$

چنین معادلاتی را معادلهٔ چندتوانی خواهیم نامید. برای حل این معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^{(x^x)} = (x^x)^x$$
$$\Rightarrow x^{(x^x)} = (x^x)^x$$

با استفاده از قاعدهٔ $(a^b)^c = a^{(b\times c)}$، در سمت راست برابری اخیر خواهیم داشت:

$$\Rightarrow x^{(x^x)} = x^{(x^۲)}$$

همچنین، با استفاده از قاعدهٔ $a^b = a^c \Rightarrow b = c$، داریم:

$$\Rightarrow x^x = x^۲$$
$$\Rightarrow x = ۲$$

در واقع این همان مورد استثنایی است که در بخش (۴-۱) بدان اشاره شد. پرسشی دیگر را مطرح می‌کنیم که به تشکیل معادلهٔ چندتوانی دیگری می‌انجامد: اگر سه‌توانی جهت پایین x با چهارتوانی جهت بالای x برابر باشد، x برابر چه مقداری است؟

معادلهٔ مربوط به این پرسش را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم:

$$x^{x^x} = x^{x^{x^x}}$$
$$\Rightarrow x^{(x^x)} = (x^{x^x})^x$$
$$\Rightarrow x^{(x^x)} = ((x^x)^x)^x$$
$$\Rightarrow x^{(x^x)} = (x^{(x^۲)})^x$$
$$\Rightarrow x^{(x^x)} = x^{(x^۳)}$$
$$\Rightarrow x^x = x^۳ \quad \Rightarrow x = ۳$$

نوبت شما. **محاسبه‌های زیر را انجام دهید.**

$$۳^{۳^۳} \ , \ ۳^{۳^{۳^۳}}$$

پرسشی دیگر و طرح و حل معادله‌ای دیگر: به ازای چه مقداری از x، چهارتوانی جهت پایین x با سه توانی جهت بالای x مقدار یکسانی دارند؟

$$x^{x^{x^x}} = x^{x^x}$$

$$\Rightarrow x^{(x^{x^x})} = (x^x)^x$$
$$\Rightarrow x^{(x^{x^x})} = x^{(x.x)}$$
$$\Rightarrow x^{x^x} = x^۲$$
$$\Rightarrow x^{(x^x)} = x^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۲$$

حل این معادله به معادلهٔ $x^x=۲$ منجر شد. باید بدانید که حل معادلهٔ $x^x=۲$ مربوط به ریاضیات دانشگاهی است. البته حل این معادله زیاد دشوار نیست. کافی است از دبیر خود روش حل موسوم به «روش نیوتن- رفسُن» را پرس‌وجو کنید. پاسخ معادلهٔ $x^x=۲$ از این روش مقدار تقریبی $x \simeq ۱/۵۵۹۶۱$ می‌شود.

نوبت شما. **معادلهٔ مربوط به پرسش زیر را تشکیل و آن را حل کنید.**

به ازای چه مقداری از x، چهارتوانی جهت پایین x با چهارتوانی جهت بالای x، برابر می‌شوند؟

راهنمایی. اگر بتوانید حل معادله را تا آخرین مرحله به درستی پیش ببرید، به معادلهٔ $x^x=۳$ می‌رسید. پاسخ این معادله با همان روش ذکر شده در معادلهٔ پیشین، برابر مقدار تقریبی $x \simeq ۱/۸۲۵۴۵$ می‌شود.

* منبع

Gardner, Martin; The colossal Book of short puzzles and Problems; Edited By Dana Richards; 2006.